

# Freiräume im Mathematikunterricht: Geschlossene Lehrmittelaufgaben öffnen

Nachfolgend werden die verschiedenen Wege, die von der geschlossenen zur offenen Aufgabe führen, aufgezeigt und mit Beispielen aus der Unterstufe und der Mittelstufe konkretisiert. Selbstverständlich lassen sich diese Wege auch auf anderen Schulstufen umsetzen, das Prinzip bleibt dasselbe.

Einer Lehrmittelaufgabe wird jeweils eine Alternative im Sinne der Freiräume gegenüber gestellt. Die Alternative ist jeweils als Auftrag für die Kinder formuliert und orientiert sich an den Kriterien für gute Aufträge.

## Aufgaben vorzeitig stellen

Weg 1

Es werden den Kindern Aufgaben gestellt, die Inhalte betreffen, die in der Schule noch nicht behandelt worden sind.

Die Schülerinnen und Schüler können dadurch eigene Lösungswege und –strategien entwickeln und erproben oder Vorkenntnisse aus dem außerschulischen Bereich einbringen.

### Beispiel Unterstufe

1. Klasse, Anfang Dezember

#### Der Samichlaus kommt

Stell dir vor, der Samichlaus besucht euch im Schulzimmer.

Er leert seinen Sack aus und bringt euch 20 Mandarinen.

Ihr könnt sie untereinander aufteilen. Wie viele Mandarinen bekommt jedes von euch?

Schreibe und male auf, wie du diese Aufteilung machst und was du dabei alles überlegst.



### Beispiel Mittelstufe

4./5. Klasse

Stell dir vor, du hast Geburtstag. Du hast eine ganz besonders leckere Geburtstagstorte bekommen und möchtest sie gerecht mit deiner Familie teilen. Wie gehst du vor? Wie gross sind die Kuchenstücke?

Schreibe und zeichne auf, wie du diese Aufteilung machst und was du dabei alles überlegst.

Weg 2

Wenn deine Grosseltern oder Freunde und Freundinnen auch noch zu Besuch gekommen wären, hätte deine Aufteilung ganz anders ausgesehen! Schreibe und skizziere auch zu dieser Situation.

### Lösungswege erfragen und darstellen

Die Schülerinnen und Schüler überlegen sich, wie sie eine Aufgabe genau lösen und schreiben ihren individuellen Lösungsweg dazu auf.

Die verschiedenen Lösungswege können anschliessend den anderen vorgestellt und gemeinsam in der Klasse diskutiert werden.

### Beispiel Unterstufe

Zürcher Mathematiklehrmittel 1. Klasse, Seite 30

Rechne die Terme aus.

1.	$14 - 9$ $11 - 2$ $13 - 7$ $12 - 10$	2.	$16 - 8$ $12 - 4$ $14 - 7$ $18 - 9$	3.	$13 - 5$ $19 - 10$ $11 - 8$ $14 - 6$	4.	$17 - 8$ $13 - 10$ $11 - 7$ $15 - 8$
5.	$14 - 8$ $12 - 7$ $16 - 9$ $11 - 6$	6.	$13 - 4$ $17 - 10$ $12 - 8$ $11 - 9$	7.	$12 - 6$ $15 - 10$ $18 - 8$ $14 - 5$	8.	$16 - 7$ $11 - 5$ $18 - 10$ $12 - 9$
9.	$13 - 8$ $15 - 9$ $11 - 4$ $16 - 6$	10.	$17 - 9$ $11 - 10$ $15 - 7$ $13 - 6$	11.	$12 - 5$ $13 - 9$ $16 - 10$ $11 - 3$	12.	$14 - 10$ $17 - 7$ $12 - 3$ $15 - 6$

### Alternative:

Wähle aus diesen Aufgaben mindestens sechs aus. Löse sie.

Schreibe genau auf, wie du dabei vorgehst und was du der Reihe nach alles überlegst.

War dieser Lösungsweg für dich bequem?

Hättest du diese Rechnungen auch ganz anders lösen können? Wie? Schreibe deinen neuen Vorschlag wieder genau auf.

### Beispiel Mittelstufe

Zahlenbuch 4, Seite 3

2a.	$9 \cdot 6$	$54 : 6$	$54 : 9$	b.	$8 \cdot 9$	$72 : 9$	$72 : 8$
	$90 : 6$	$540 : 6$	$540 : 90$		$80 \cdot 9$	$720 : 9$	$720 : 80$

### Alternative:

Diese Rechnungen stehen nicht zufällig untereinander. Überlege dir, weshalb die Autorin oder der Autor diese Aufgaben so schreibt. Notiere deine Gedanken.

Wähle eines dieser Rechenpakete aus. Löse die Aufgaben. Schreibe genau auf, wie du dabei vorgehst und was du der Reihe nach alles überlegst.

Weg 3

War dieser Lösungsweg für dich bequem?

Hättest du diese Rechnungen auch ganz anders lösen können? Wie? Schreibe deinen neuen Vorschlag wieder genau auf.

## Muster oder Gesetzmässigkeiten erkennen und formulieren

Die Schülerinnen und Schüler werden dazu aufgefordert, Beobachtungen anzustellen und diese zu formulieren. Dabei stehen Beobachtungen, die sich auf Muster oder Regelmässigkeiten beziehen, im Zentrum. Besonders begabte Kinder können in einem weiteren Schritt versuchen, ihre Beobachtungen zu begründen und eventuell Prognosen für weitere Beispiele stellen. Ein letzter Schritt wäre dann der Beweis für die gemachten Entdeckungen.

### Beispiel Unterstufe

Rechnen 2 TG, Heft 2, Seite 34

1	2	3
$2 \cdot 2 = \blacksquare$	$4 \cdot 2 = \blacksquare$	$6 \cdot 2 = \blacksquare$
$2 \cdot 4 = \blacksquare$	$4 \cdot 4 = \blacksquare$	$6 \cdot 4 = \blacksquare$
$2 \cdot 8 = \blacksquare$	$4 \cdot 8 = \blacksquare$	$6 \cdot 8 = \blacksquare$
$3 \cdot 2 = \blacksquare$	$5 \cdot 2 = \blacksquare$	$7 \cdot 2 = \blacksquare$
$3 \cdot 4 = \blacksquare$	$5 \cdot 4 = \blacksquare$	$7 \cdot 4 = \blacksquare$
$3 \cdot 8 = \blacksquare$	$5 \cdot 8 = \blacksquare$	$7 \cdot 8 = \blacksquare$

### Alternative:

Hier siehst du Rechnungen aus der 2er-, 4er- und 8er-Reihe. Diese drei Reihen werden nicht zufällig miteinander aufgeschrieben. Notiere diese drei Reihen für dich und betrachte die Resultate.

Erkennst du Muster und Gemeinsamkeiten? Schreibe sie auf und zeichne sie ein.

Siehst du noch weitere Gemeinsamkeiten? Berichte auch davon und schreibe deine Überlegungen genau auf.

Gibt es auch Unterschiede? Welche? Notiere auch diese.

### Beispiel Mittelstufe

Rechnen 4. Schuljahr TG, Seite 111

Achte gut auf die Rechenzeichen:

<b>56.</b> $80 + 8$	<b>57.</b> $240 : 3$	<b>58.</b> $3600 \cdot 2$
$80 \cdot 8$	$240 + 3$	$3600 : 2$
$80 : 8$	$240 \cdot 3$	$3600 - 2$
$80 - 8$	$240 - 3$	$3600 + 2$
<b>59.</b> $350 + 70$	<b>60.</b> $630 - 90$	<b>61.</b> $5400 : 6$
$350 : 70$	$630 + 90$	$5400 + 6$
$350 - 70$	$630 : 90$	$5400 - 6$
<b>62.</b> $32 \diamond 4 = 28$	<b>63.</b> $45 \diamond 5 = 9$	<b>64.</b> $49 \diamond 7 = 7$
$32 \diamond 4 = 128$	$45 \diamond 5 = 40$	$28 \diamond 4 = 32$
$32 \diamond 4 = 8$	$45 \diamond 5 = 50$	$40 \diamond 5 = 200$
$32 \diamond 4 = 36$	$45 \diamond 5 = 225$	$64 \diamond 8 = 56$

**Alternative:**

Diese Aufgaben wurden von den Autoren und Autorinnen deines Rechenlehrmittels nicht zufällig untereinander geschrieben. Überlege dir, was sie damit wohl beabsichtigt haben könnten. Notiere deine Gedanken.

Es gibt spannende Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den einzelnen Operationen. Untersuche sie an einem eigenen Zahlenbeispiel. Schreibe die verschiedenen Rechnungsarten mit deinen gewählten Zahlen auf. (Vielleicht kennst du noch mehr Operationen als diese vier....) Löse deine Rechnungen.

Betrachte die Ergebnisse und überlege dir Zusammenhänge und Unterschiede. Schreibe sie auf.

**Analoge Aufgaben erfinden, Aufgaben variieren**

Hier müssen die Kinder den Aufgabentyp erfassen und über den Schwierigkeitsgrad nachdenken. Dann erfinden sie eigene Aufgaben, die ihrem Niveau entsprechen und den Aufgabentyp berücksichtigen.

**Beispiel Unterstufe**

Rechnen 1 TG, Heft 3, Seite 10

$8 + \blacksquare = 10$	$18 + \blacksquare = 20$	$8 + \blacksquare = 20$
$5 + \blacksquare = 10$	$15 + \blacksquare = 20$	$5 + \blacksquare = 20$
$9 + \blacksquare = 10$	$19 + \blacksquare = 20$	$9 + \blacksquare = 20$
$1 + \blacksquare = 10$	$11 + \blacksquare = 20$	$1 + \blacksquare = 20$
$2 + \blacksquare = 10$	$12 + \blacksquare = 20$	$2 + \blacksquare = 20$

**Alternative:**

Schau die Rechnungen in einer Zeile (waagrecht, von links nach rechts) genau an. Die Autoren und Autorinnen dieses Buches haben diese Rechnungen nicht zufällig nebeneinander geschrieben. Zwischen ihnen bestehen Zusammenhänge. Überlege, welche und schreibe deine Gedanken auf.

Erfinde selbst solche Rechnungszeilen. Löse sie.

Erfinde besonders schwierige Rechnungszeilen. Löse auch diese.

**Beispiel Mittelstufe**

Zahlenbuch 5, Seite 58

### Längenmasse

1. Schreibe ohne Brüche.

a. $\frac{1}{4}$ m =	b. $\frac{1}{50}$ m =	c. $\frac{2}{4}$ m =	d. $\frac{2}{10}$ m =
$\frac{1}{5}$ m =	$\frac{1}{100}$ m =	$\frac{3}{4}$ m =	$\frac{4}{10}$ m =
$\frac{1}{10}$ m =	$\frac{1}{200}$ m =	$\frac{2}{5}$ m =	$\frac{6}{10}$ m =
$\frac{1}{20}$ m =	$\frac{1}{500}$ m =	$\frac{3}{5}$ m =	$\frac{8}{10}$ m =
$\frac{1}{25}$ m =	$\frac{1}{1000}$ m =	$\frac{4}{5}$ m =	$\frac{10}{10}$ m =
e. $\frac{5}{20}$ m =	f. $\frac{10}{25}$ m =	g. $\frac{10}{50}$ m =	
$\frac{10}{20}$ m =	$\frac{11}{25}$ m =	$\frac{10}{100}$ m =	
$\frac{15}{20}$ m =	$\frac{12}{25}$ m =	$\frac{20}{50}$ m =	
$\frac{20}{20}$ m =	$\frac{13}{25}$ m =	$\frac{20}{100}$ m =	
$\frac{25}{20}$ m =	$\frac{14}{25}$ m =	$\frac{30}{50}$ m =	
$\frac{30}{20}$ m =	$\frac{15}{25}$ m =	$\frac{30}{100}$ m =	

### Alternative:

Schau die Rechnungen in einem Block genau an. Die Autoren und Autorinnen dieses Buches haben diese Rechnungen nicht zufällig untereinander geschrieben. Zwischen ihnen bestehen Zusammenhänge. Überlege, welche und schreibe deine Gedanken auf.

Erfinde selbst solche Blöcke Löse deine Aufgaben.

Erfinde einen Rechenblock mit besonders schwierigen Aufgaben. Löse auch diese.

### Aufgaben für einen Partner oder eine Partnerin gestalten

Hier sind die sozialen Fähigkeiten gefragt! Ein Schüler oder eine Schülerin muss sich zunächst Gedanken darüber machen, für wen er oder sie analoge Aufgaben gestalten möchte. Das setzt Einfühlungsvermögen und das Abschätzen des individuellen Leistungsstandes des Partners oder der Partnerin voraus.

Gleichzeitig wird durch das adressatenbezogene Arbeiten die Motivation und die Verbindlichkeit erhöht.

### Beispiel Unterstufe

Rechnen 1 TG, Heft 2, Seite 27

8 + 1 = ■	3 + 2 = ■	2 + 7 = ■
2 + 6 = ■	4 + 5 = ■	4 + 3 = ■
3 + 3 = ■	7 + 2 = ■	5 + 4 = ■
1 + 5 = ■	6 + 2 = ■	1 + 8 = ■
4 + 3 = ■	3 + 5 = ■	2 + 4 = ■

### Alternative:

Gestalte für deinen Partner oder deine Partnerin ein Aufgabenblatt mit ähnlichen Aufgaben. Dein Partner oder deine Partnerin muss die Aufgaben mit Anstrengung lösen können. Du darfst also nicht zu einfache, aber auch nicht zu schwierige Aufgaben stellen.

Und weil du nachher Lehrer oder Lehrerin bist und die Arbeit korrigieren darfst, musst du natürlich alle Aufgaben auch selbst lösen können!

Bestimmt freut sich der Partner oder die Partnerin über ein besonders schönes Aufgabenblatt.

### Beispiel Mittelstufe

Rechnen 4. Schuljahr TG, Seite 85

- |             |              |              |             |
|-------------|--------------|--------------|-------------|
| 1. $51 : 3$ | 2. $56 : 4$  | 3. $65 : 5$  | 4. $96 : 6$ |
| $39 : 3$    | $72 : 4$     | $95 : 5$     | $72 : 6$    |
| $45 : 3$    | $48 : 4$     | $55 : 5$     | $90 : 6$    |
| $57 : 3$    | $64 : 4$     | $70 : 5$     | $108 : 6$   |
| 5. $77 : 7$ | 6. $120 : 8$ | 7. $117 : 9$ | 8. $38 : 2$ |
| $119 : 7$   | $96 : 8$     | $135 : 9$    | $28 : 2$    |
| $91 : 7$    | $152 : 8$    | $108 : 9$    | $46 : 2$    |
| $112 : 7$   | $112 : 8$    | $162 : 9$    | $64 : 2$    |

### Alternative:

Gestalte für deinen Partner oder deine Partnerin ein Aufgabenblatt mit ähnlichen Aufgaben. Dein Partner oder deine Partnerin muss anspruchsvolle Aufgaben lösen können. Du darfst also nicht zu einfache, aber auch nicht zu schwierige Aufgaben stellen.

Weil du nachher Lehrer oder Lehrerin bist und die Arbeit korrigieren darfst, musst du natürlich alle Aufgaben auch selbst lösen können!

Bestimmt freut sich der Partner oder die Partnerin über ein besonders schönes Aufgabenblatt.

## Authentische Daten bei Sachaufgaben

Durch diese Möglichkeit entstehen Querverbindungen, zum Beispiel zu Themen aus dem Bereich Mensch und Umwelt oder zum Umfeld und Alltag der Kinder. Hierbei können alle oder einzelne Kinder in die Suche nach solch authentischen Daten einbezogen werden. Oft werden auch in dieser Phase wichtige und wertvolle Erfahrungen gemacht.

Die Motivation beim Lösen der Textaufgaben mit authentischem Zahlenmaterial ist wesentlich höher, da der Bezug zum Alltag gewährleistet ist und die Kinder ihre Fragestellungen auch selbst erarbeiten und ausbauen können.

### Beispiel Unterstufe

Rechnen 2 TG, Heft 2, Seite 46

Jasmine sammelt Bleistiftspitzer. Es fehlen ihr noch 7,  
dann hat sie genau 100.

### Alternative:

Viele Kinder sammeln etwas. Frage in deiner Klasse nach, was deine Kameradinnen und Kameraden sammeln. Schreibe jeweils den Namen auf. Notiere daneben, was dieses Kind sammelt und wie viele Exemplare es davon schon hat.

Fertige damit eine Liste an.

Betrachte deine Liste. Bestimmt fällt dir dabei einiges auf. (z. B. : Wer hat die grösste Sammlung? Um wie viel grösser ist sie als die kleinste Sammlung? usw.)

Schreibe deine Beobachtungen und Ergebnisse auf.

Wähle eine grosse Zahl. Wie viele Dinge müssen alle Kinder noch sammeln, bis sie diese Zahl erreicht haben?

### Beispiel Unterstufe

Zahlenbuch 2, Seite 105

### **Alle werden älter**

1.



	vor 8 Jahren	vor 2 Jahren	heute	in 10 Jahren
Anja			8	
Mama			31	
Oma			63	

2. Wie viele Jahre ist Mama älter als Anja?

3. Wie alt ist Anja in 10 Jahren?

4. Wie alt ist dann Anjas Mama?

### Alternative:

Schreibe eine Liste mit deinen Familienmitgliedern und deinen Freunden und Freundinnen. Notiere daneben ihr heutiges Alter. Wie alt waren diese Personen vor fünf Jahren? Vor sieben Jahren? Wie alt werden sie in 15 Jahren sein?

Wähle mindestens drei Zeitspannen aus, die du dann für deine Personen berechnest.

Bestimmt gibt es noch andere spannende Fragen und Berechnungen, die du mit diesen Zahlen anstellen könntest. Notiere und rechne!

### Eine schwierigere und freiere Alternative:

#### Das genaue Alter

Rechne nach, wie alt du ganz genau bist.

Schreibe zuerst dein Geburtsdatum auf. Frage deine Eltern nach deiner genauen Geburtszeit. Schreibe auch sie auf.

Schreibe dann das Datum von heute und die Uhrzeit auf.

Rechne möglichst genau aus, wie alt du in diesem Augenblick bist.

Schreibe deine Überlegungen alle ganz genau auf.

Wie lange dauert es noch bis zu deinem Geburtstag?

Rechne möglichst genau und schreibe alle deine Überlegungen auf.

Vergleiche dein genaues Alter mit dem von einer Freundin oder einem Freund.

Was stellst du dabei alles fest?

Schreibe auf, mit wem du dein Alter vergleichst und was du dabei alles feststellen kannst.

Bist du schon 500 Wochen alt?

Überlege genau und begründe deine Antwort.

Und wie steht es mit den Tagen? Bist du schon 2500 Tage alt? Bist du jünger oder älter? Überlege genau und begründe deine Antwort.

Jemand behauptet von sich, er sei 257 Monate alt.

Was kannst du dazu alles sagen? Schreibe deine Vermutungen und Überlegungen auf.

### **Beispiel Mittelstufe**

Rechnen 6. Schuljahr TG, Seite 40

#### **179. Blitz und Donner**

Dort, wo es blitzt, entsteht jenes Krachen, das wir wenig später als Donner hören. Der Schall legt in einer Sekunde 340 m zurück ( $340 \frac{m}{s}$ ). Wie weit entfernt war der Blitz, wenn es vom Aufleuchten bis zum Donnerrollen

a) 5 s dauerte?

b) 13 s dauerte?

c) 38 s dauerte?

d) Je weiter entfernt der Blitz ist, desto schwächer hörst du den Donner.

Hast du schon einmal erlebt, dass der Donner eine ganze Minute nach dem Blitz zu hören war? Wie weit weg müsste es in einem solchen Fall blitzen?

Wie viele Sekunden nach dem Blitz hörst du den Donner, wenn es

e)\* in einer Entfernung von 5 km 780 m blitzt?

f)\* in einer Entfernung von 2 km 890 m blitzt?

### **Alternative:**

Ein Gewitter ist eine spannende physikalische Angelegenheit. Dort, wo es blitzt, entsteht jenes Krachen, das wir wenig später als Donner hören.

Zwischen dem Blitzen und dem Donnern kann eine ziemliche Zeitspanne vergehen. Diese Zeitspanne findet man auch in verschiedenen „Faustregeln“, die sagen, wie weit das Gewitter noch entfernt ist. Kennst du solche „Faustregeln“? Kennen deine Eltern oder andere Personen solche „Faustregeln“? Notiere sie.

Finde heraus, wie lange der Schall braucht, um eine gewisse Strecke zurückzulegen. Du kannst in Lexika, Sachbüchern, in Physikbüchern, usw. nachschlagen. Notiere deine Ergebnisse.

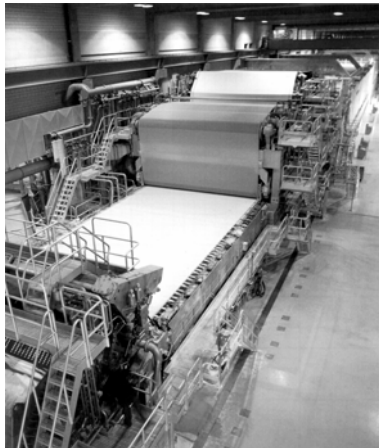
Berechne nun für verschiedene Zeitspannen, wie weit der Blitz entfernt war beim Aufleuchten bis zum Donnerrollen.

In der Physik gibt es noch andere wichtige Grössen, z.B. die Lichtgeschwindigkeit. Finde heraus, wie gross sie ist und vergleiche sie mit der Schallgeschwindigkeit. Notiere deine Überlegungen und Erkenntnisse.

Vielleicht kannst du mit der Lichtgeschwindigkeit ähnliche Berechnungen anstellen.

## Ein passendes Beispiel zum Thema aus dem Bereich Mensch und Umwelt

### Zahlen aus der Papierfabrik



Natürlich wird Papier heute nicht mehr aus der Bütte geschöpft, wie wir das gemacht haben. Papier wird in der Fabrik hergestellt.

Hier findest du ein paar spannende Zahlen aus der Papierfabrik:

Die Papiermaschine, die du hier siehst, ist 300 m lang.

Sie kann 2000 m (das sind 2 Kilometer) Papier in der Minute herstellen.

Der Erdumfang beträgt 40 000 km.

Das Papier, das sie in einer Stunde herstellt, ist 20 Tonnen schwer (das sind 20 000 kg).

Ein mittelgrosses Auto ist ungefähr eine Tonne schwer.

In der Schweiz braucht jede Person im Jahr 201 kg Papier.

In Russland sind es 27 kg und in den USA sind es 309 kg Papier.

Heute leben in Altnau 1813 Menschen.

In der Schweiz leben ungefähr 7 000 000.

1. Lies diesen Text für dich durch. Unterstreiche die Wörter, die du nicht verstehst. Frage die Lehrerin oder einen Klassenkameraden oder eine Kameradin, was sie bedeuten.
2. Übermale die Zahlen, die du besonders wichtig findest.
3. Überlege dir spannende Fragen mit diesen Zahlen und notiere deine Fragen.
4. Versuche deine Fragen zu lösen. Schreibe alles auf, was du dir dabei überlegst und was du wie rechnest.

Weg 7

## Thematisierungen suchen

Zu einer Rechnung sollen die Kinder repräsentative Bedeutungen in Form einer Rechnungsgeschichte erfinden und formulieren. So wird ein Zusammenhang zwischen Mathematik und Sprache hergestellt und die wirkliche Handlung, die hinter der mathematischen Operation steht, bewusst gemacht. Die Thematisierungen können fantasievoll und sollen eigenständig sein, so dass ein Austausch unter den Kindern interessant wird.

### Beispiel Unterstufe

1. Klasse

$$8+7=$$

Diese Rechnung erzählt eine Geschichte. Überlege dir, wie die Geschichte gehen könnte, die in dieser Rechnung versteckt ist. Schreibe deine Geschichte auf. Male ein passendes Bild dazu, wenn du möchtest.

### Beispiel Mittelstufe

6. Klasse

$$7 \cdot \frac{7}{8} =$$

Hinter dieser Rechnung steckt eine Handlung. Diese Handlung, die hier sehr knapp und mathematisch notiert worden ist, könnte ganz unterschiedlich ausgesehen haben. Überlege dir eine solche Möglichkeit, was da geschehen sein könnte. Erfinde eine passende Rechnungsgeschichte und schreibe sie auf.